Feuille d'exercices facultative — **2MIC-D**
INSA Toulouse — **Analyse Signal**
Alban Gossard : gossard@insa-toulouse.fr — 2019-2020

Exercice 1

Soit s le signal périodique de période T définir par :

$$s(t) = at \quad \forall t \in \left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$$

1. Représenter graphiquement le signal s.
2. Donner le développement en série de Fourier de s.
3. La série de Fourier associée à s converge-t-elle normalement vers s sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

Soit s le signal défini par :

$$s(t) = \begin{cases} at & \text{si } t \in \left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement le signal s.
2. Calculer la transformée de Fourier de s.
3. Calculer l'énergie du signal s.

Exercice 3

Soient $a \in \mathbb{C}$, $f_0 \in \mathbb{R}$ et le signal s défini par :

$$s(t) = \begin{cases} e^{-at}\cos(2\pi f_0 t) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. A quelle condition $s \in L^1(\mathbb{R})$?
2. Donner la transformée de Fourier de s.

Exercice 4 $\star$

Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-a(t-u)^2}\,\mathrm{d}u = e^{-t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{avec } a > 1$$

Donner l'expression de f.

Exercice 5 $\star$

Soient $a > 0$, $f_0 \in \mathbb{R}$ et le signal s défini par :

$$s(t) = \begin{cases} t + \frac{a}{2} & \text{si } t \in \left]-\frac{a}{2}, 0\right[\\ -t + \frac{a}{2} & \text{si } t \in \left]0, \frac{a}{2}\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner la transformée de Fourier de s.

2. A l'aide de l'expression de $F[s](f)$, donner l'expression de I :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(f)^2}{f^2} \cos(fx) \, \mathrm{d}f$$

Exercice 6 $\star$

Soit f la fonction définie par :

$$f(t) = \frac{\sin(\pi a t)}{\pi t} \qquad \text{avec } a > 0$$

1. La fonction f est-elle dans $L^2(\mathbb{R})$?
2. Donner l'expression de $f * f$.
3. Soit $\tau \in \mathbb{R}$, sous quelle condition f est-elle orthogonale à $t \mapsto f(t - \tau)$ dans $L^2(\mathbb{R})$?

Exercice 7 $\star\star$

Soit g une fonction positive et **paire** telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \, \mathrm{d}x = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}} x^2 g(x) \, \mathrm{d}x = \sigma^2$$

1. En utilisant la formule de Taylor en 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + x^2 \epsilon(x) \qquad \text{avec } \epsilon(x) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

montrer que le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $F[g](f)$ est :

$$F[g](f) = 1 - 2\pi^2 \sigma^2 f^2 + f^2 \epsilon(f) \qquad \text{avec } \epsilon(f) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

2. Soit $h_1 = g$, $h_2 = g * g$, $h_3 = g * g * g$, etc. Donner l'expression de $F[h_n](f)$ en fonction de $F[g](f)$.
3. Chercher la limite de $F[h_n]\left(\frac{f}{\sqrt{n}}\right)$ quand n tends vers $+\infty$.
4. En déduire que la suite de fonctions h_n tend vers une gaussienne h d'expression :

$$h(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$