Feuille de TD 3 — *2MIC Analyse-Signal 2019–2020*

Exercice 1

Donner des exemples de signaux qui sont :

1. Dans $L^1(\mathbb{R})$ et pas dans $L^2(\mathbb{R})$.
2. Dans $L^2(\mathbb{R})$ et pas dans $L^1(\mathbb{R})$.
3. Ni dans $L^1(\mathbb{R})$ ni dans $L^2(\mathbb{R})$.
4. Dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.
5. Dans $L^1(\mathbb{R})$ et continue.
6. Dans $L^1(\mathbb{R})$ et discontinue.

Exercice 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement dans f sur $\mathbb{R}$. A-t-on convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f dans $L^1(\mathbb{R})$? dans $L^2(\mathbb{R})$? On pourra considérer les exemples suivants :

1. $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \sqrt{n}e^{-n^2t^2}$.
2. $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \frac{n^2\sin(nt)}{2\pi}\mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}]}(t)$.
3. $\forall t \notin [0,1],\ f_n(t) = 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 3

Soient x et y deux signaux définis sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = e^{-a|t|} \text{ et } y(t) = e^{-b|t|}$$

où $a > 0$, $b > 0$ et $a \neq b$.

1. Calculer $\|x\|_1$. Les signaux x et y sont-ils des éléments de $L^1(\mathbb{R})$? de $L^2(\mathbb{R})$?
2. Quelle est la parité de $x * y$? Le démontrer.
3. Montrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ x * y(t) = \frac{e^{-a|t|} + e^{-b|t|}}{a+b} - \frac{e^{-a|t|} - e^{-b|t|}}{a-b}.$$
4. Calculer la transformée de Fourier de x.
5. En déduire la transformée de Fourier de $x * y$.
6. Déduire de la question 4 la transformée de Fourier du signal $s(t) = \frac{1}{1+4\pi^2t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, puis calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(u)}{1+u^2}du$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Soit $\lambda > 0$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$s'(x) + \lambda x s(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Calculer s pour que $s(0) = 1$.
2. Vérifier que $s \in L^1(\mathbb{R})$.
3. Donner l'équation différentielle vérifiée par la transformée de Fourier $F[s]$ de s.
4. En déduire $F[s]$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ (Lien entre les transformées de Fourier et de Laplace)
On rappelle que la transformée de Laplace d'un signal s est donnée pour tout $p \in \mathbb{C}$ par :

$$L[s](p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt}dt.$$

On définit sur $[0, +\infty[$ les signaux :

$$s_+(t) = s(t) \text{ et } s_-(t) = s(-t).$$

1. Donner la transformée de Fourier $F[s]$ du signal s en fonction de $L[s_+]$ et de $L[s_-]$.
2. Soit $s(t) = t^2 e^{|t|}$. En utilisant les tables de la transformée de Laplace et la question ci-dessus, donner la transformée de Fourier de s.

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ (Lien entre série et transformée de Fourier)

Partie 1.

Soit s_1 le signal pair, périodique de période T, et défini par :

$$s_1(t) = at, \; t \in]0, \frac{T}{2}[.$$

1. Représenter graphiquement le signal s_1.
2. Donner le développement en série de Fourier de s_1.
3. Calculer l'énergie du signal s_1 sur une période.

Partie 2.

Soit s_2 le signal défini par :

$$s_2(t) = \begin{cases} at & \text{si } t \in]0, \frac{T}{2}[\\ -a(t-T) & \text{si } t \in [\frac{T}{2}, T[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement le signal s_2.
2. Calculer la transformée de Fourier de s_2.
3. Calculer l'énergie du signal s_2, conclure.

Annexe : Propriétés générales de la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \quad p > 0$$

où la fonction f vérifie : $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](p)$
1	$af_1(t) + bf_2(t)$	$a[f_1](p) + b[f_2](p)$
	Propriétés de translation	
2	$e^{at}f(t)$	$[f](p-a)$
3	$f(t-a),\ t > a$	$e^{-ap}[f](p)$
	Changement d'échelle	
4	$f(at)$	$\frac{1}{a}[f](\frac{p}{a})$
	Dérivées d'une fonction	
5	$f'(t)$	$p[f](p) - f(0)$
6	$f^{(n)}(t)$	$p^n[f](p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
	Primitive d'une fonction	
7	$\int_0^t f(s)ds$	$\frac{1}{p}[f](p)$
		Dérivation de la tf. de Laplace
8	$t^n f(t)$	$(-1)^n[f]^{(n)}(p)$
		Intégration de la tf. de Laplace
9	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty}[f](u)du$
	Fonctions périodiques	
10	$\forall t \geq 0,\ f(t) = f(t+T)$	$[f](p) = \frac{1}{1-e^{-pT}}\int_p^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt$
	Convolution	
11	$(f \star g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds$	$[f](p)[g](p)$
12	t^s	$\frac{\Gamma(s+1)}{p^{s+1}},\ s > -1$

Table des transformées de Laplace

	$\mathcal{L}[f](p)$	$f(t),\ t \geq 0$ sachant que $f(t) = 0,\ t < 0$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{1}{p^2}$	t
3	$\frac{1}{p^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!},\ 0! = 1$
4	$\frac{1}{p^s},\ s > 0$	$\frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n) = (n-1)!$
5	$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
6	$\frac{1}{(p-a)^n},\ n \in \mathbb{N}^\star$	$e^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
7	$\frac{1}{(p-a)^s},\ s > 0$	$e^{at}\frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}$
8	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$cos(\omega t)$
9	$\frac{1}{p^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}sin(\omega t)$
10	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	$ch(\omega t)$
11	$\frac{1}{p^2-\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}sh(\omega t)$