Correction TD 3 signal — 2MIC-D

INSA Toulouse — **Analyse Signal**
Alban Gossard : gossard@insa-toulouse.fr — 2019-2020
D'après les TD de Aude Rondepierre

Quelques rappels

Espaces $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$:

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \iff \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt < +\infty \tag{1}$$

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \iff \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt} < +\infty \tag{2}$$

Intégrales de Riemann :

$$\text{Pour } x_0 > 0,\ \int_0^{x_0} \frac{1}{t^p} dt < +\infty \iff p < 1 \tag{3}$$

$$\text{Pour } x_0 > 0,\ \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt < +\infty \iff p > 1 \tag{4}$$

Transformée de Fourier :

$$\text{Pour } s \in L^1(\mathbb{R}),\ f \in \mathbb{R},\ F[s](f) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2i\pi ft} dt \tag{5}$$

Exercice 1

Dans les trois premières questions on cherche un signal qui appartient/n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$. Ces questions peuvent être résolues grâce à l'intuition : poser un signal et vérifier les conditions sur l'appartenance ou non aux espaces. Un moyen sûr d'arriver à en trouver un est de prendre des signaux de la forme $s : t \mapsto t^{-\alpha}$ et d'écrire les conditions grâce au critère de Riemann.

i) Signal dans $L^1(\mathbb{R})$ et pas dans $L^2(\mathbb{R})$

$$s_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|t|}} & \text{si } |t| < 1 \text{ et } t \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{6}$$

$$\|s_1\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |s_1(t)|\, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|t|}} \mathrm{d}t < +\infty \qquad \text{car } \frac{1}{2} < 1$$

$$\|s_1\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} s_1(t)^2 \, \mathrm{d}t} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{1}{|t|} \mathrm{d}t} = +\infty$$

Donc $s_1 \in L^1(\mathbb{R})$ et $s_1 \notin L^2(\mathbb{R})$.

Comment a-t-on procédé pour choisir s_1 ?

Prenons $s(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^\alpha} & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\forall t$, nous voulons avoir :

$$\begin{cases} \|s\|_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{|t|^\alpha} \mathrm{d}t < +\infty \iff \alpha < 1 \\ \|s\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{|t|^{2\alpha}} \mathrm{d}t} = +\infty \iff \alpha \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Il est possible de vérifier qu'on ne peut pas trouver de signal de la forme $s : t \mapsto \begin{cases} t^{-\alpha} & \text{si } |t| > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ qui vérifie les hypothèses ici demandées.

ii) Signal dans $L^2(\mathbb{R})$ et pas dans $L^1(\mathbb{R})$

En appliquant un raisonnement analogue est à la première question, on trouve :

$$s_2(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{si } |t| > 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \|s_2\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |s_2(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|t|}\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{|t|}\,\mathrm{d}t = +\infty \\ \|s_2\|_2 &= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} s_2(t)^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t} < +\infty \qquad \text{car } 2 > 1 \end{aligned}$$

Donc $s_2 \notin L^1(\mathbb{R})$ et $s_2 \in L^2(\mathbb{R})$.

iii) Signal pas dans $L^1(\mathbb{R})$ et pas dans $L^2(\mathbb{R})$

$$s_3(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \|s_3\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |s_3(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t|}\,\mathrm{d}t = +\infty \qquad \text{car l'intégrale diverge en 0 et en } +\infty \\ \|s_3\|_2 &= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} s_3(t)^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t} = +\infty \qquad \text{car l'intégrale diverge en 0} \end{aligned}$$

Donc $s_3 \notin L^1(\mathbb{R})$ et $s_3 \notin L^2(\mathbb{R})$.

iv) Signal dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$

Un moyen simple de choisir une fonction ici est de prendre une fonction bornée en valeur absolue et qui décroît vite à l'infini.

$$s_4(t) = e^{-t^2},\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \|s_4\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |s_4(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi} < +\infty \\ \|s_4\|_2 &= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} s_4(t)^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} e^{-2t^2}\,\mathrm{d}t} < +\infty \end{aligned}$$

Donc $s_4 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Note : $s_4(t) = e^{-t}$ aurait aussi pu convenir.

v) Signal dans $L^1(\mathbb{R})$ et continu.

Il est possible de prendre n'importe quelle fonction bornée en valeur absolue et à support borné :

$$s_5(t) = \begin{cases} t + a & \text{si } t \in [-a, 0] \\ -t + a & \text{si } t \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{pour } a > 0 \tag{10}$$

$$\|s_5\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |s_5(t)|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a a - t\,\mathrm{d}t = a^2 < +\infty$$

Donc $s_5 \in L^1(\mathbb{R})$ et est continu.

Note : $s_5(t) = e^{-t}$ aurait aussi pu convenir.

vi) Signal dans $L^1(\mathbb{R})$ et continu.

Prendre n'importe quelle fonction bornée en valeur absolue et à support borné :

$$s_6(t) = \begin{cases} a & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{pour } a > 0 \tag{11}$$

$$\|s_6\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |s_6(t)| \,\mathrm{d}t = 2\int_0^a a \,\mathrm{d}t = 2a^2 < +\infty$$

Donc $s_6 \in L^1(\mathbb{R})$ et est discontinu.

Exercice 2

Soit $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

i) $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \sqrt{n}e^{-n^2t^2}$.

Convergence simple

Soit $n \geq 0$,

$$\forall t \neq 0, \quad |f_n(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par croissances comparées}$$
$$|f_n(0)| = \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$ où $f \overset{p.p.}{=} 0$.

Convergence $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |\sqrt{n}e^{-n^2t^2}| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{n}}{n} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x \qquad \text{par changement de variable avec } x = nt \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
\|f_n - f\|_2 &= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |ne^{-2n^2t^2}| \,\mathrm{d}t} \\
&= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-y^2} \,\mathrm{d}y} \qquad \text{par changement de variable avec } y = \sqrt{2}nt \\
&= \sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle presque partout dans $L^1(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^2(\mathbb{R})$.

ii) $\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \frac{n^2\sin(nt)}{2\pi} \mathbb{1}_{-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}}(t)$.

Convergence simple

Soient $n > 0$ et $t \neq 0$, alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0) \Rightarrow \left(|t| > \frac{\pi}{n} \Rightarrow f_n(t) = 0\right)$$

Si $t = 0$, $f_n(0) = 0$. Donc $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$ où $f : x \mapsto 0$.

Convergence $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_1 &= \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \left| \frac{n^2 \sin(nt)}{2\pi} \right| \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} n^2 |\sin(nt)| \, \mathrm{d}t \qquad \sin(nt) \geq 0 \, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(nt)}{n} n^2 \right]_0^{\frac{\pi}{n}} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(n - \cos(\pi) n \right) = \frac{2n}{\pi} \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0 \\
\|f_n - f\|_2 &= \sqrt{\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{n^4 \sin(nt)^2}{4\pi^2} \, \mathrm{d}t} \\
&= \sqrt{\frac{n^4}{4\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} 1 - \cos(2nt) \, \mathrm{d}t} \qquad \text{car } \sin(a)^2 = \frac{1 - \cos(2a)}{2} \\
&= \sqrt{\frac{n^4}{4\pi^2} \left[t - \frac{\sin(2nt)}{2n} \right]_0^{\frac{\pi}{n}}} = \sqrt{\frac{n^4}{4\pi^2} \left[\frac{\pi}{n} - \frac{\sin(2\pi)}{2n} \right]} = \sqrt{\frac{n^3}{4\pi}} \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Ainsi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers la fonction nulle ni dans $L^1(\mathbb{R})$ ni dans $L^2(\mathbb{R})$.

iii) $\forall t \notin [0,1]$, $f_n(t) = 0$ et $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Convergence simple

Soit f la fonction telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. C'est-à-dire :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Soit $t \notin [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a alors $f_n(t) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, par la convergence uniforme il vient que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[0,1]$. C'est-à-dire $\forall t \in [0,1]$, $f_n(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(t)$.

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ avec $\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{sur } [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Convergence $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - \tilde{f}(t)| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| \, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \|f_n - f\|_\infty \, \mathrm{d}t \qquad \text{car } |f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty \text{ presque partout sur } [0,1] \\
&\leq \|f_n - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par la convergence uniforme de } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sur } [0,1] \\
\|f_n - f\|_2 &= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - \tilde{f}(t)|^2 \, \mathrm{d}t} = \sqrt{\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^2 \, \mathrm{d}t} \\
&\leq \sqrt{\int_0^1 \|f_n - f\|_\infty^2 \, \mathrm{d}t} = \sqrt{\|f_n - f\|_\infty^2 \int_0^1 1 \, \mathrm{d}t} = \|f_n - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Ainsi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{f}$ dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 3

i)

Soient $a > 0$, $b > 0$ tels que $a \neq b$ et deux signaux x et y définis par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\, x(t) = e^{-a|t|},\, y(t) = e^{-b|t|} \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
\|x\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a|t|}\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{a} \\
\|x\|_2 &= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} e^{-2a|t|}\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{a}} \qquad \text{par le même calcul que pour la norme } L^1(\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Le signal y a la même expression que x donc x et y sont des éléments de $L^1(\mathbb{R})$ et de $L^2(\mathbb{R})$.

ii)

On remarque ici que x et y sont des signaux pairs. Nous allons exploiter cette propriété pour démontrer que $x * y$ l'est aussi sans utiliser les expressions de x et de y. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
(x*y)(-t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t-u)y(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+u)y(-u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{par parité de } x \text{ et de } y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-v)y(v)\,\mathrm{d}v \qquad \text{changement de variable } v=-u \\
&= (x*y)(t)
\end{aligned}
$$

Donc $x * y$ est pair.

iii)

Par la question précédente on peut restreindre le domaine la moitié de $\mathbb{R}$. Afin d'éliminer les valeurs absolues il faut faire séparer l'intégrale en plusieurs morceaux en fonction du signe des termes. Soit $t \in \mathbb{R}$,

u	$-\infty$		0		t		$+\infty$
u		$-$	0	$+$		$+$	
$t-u$		$+$		$+$	0	$-$	

$$
\begin{aligned}
(x*y)(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a|t-u|}e^{-b|u|}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{0} e^{-a(t-u)+bu}\,\mathrm{d}u + \int_0^t e^{-a(t-u)-bu}\,\mathrm{d}u + \int_t^{+\infty} e^{a(t-u)-bu}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{e^{-at}}{a+b} + \frac{e^{-at}}{a-b}\left(e^{t(a-b} - 1\right) + \frac{e^{at}}{a+b}e^{-t(a+b)} \\
&= e^{-at}\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b}\right) + e^{-bt}\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}\right) \\
&= \frac{e^{-at}+e^{-bt}}{a+b} - \frac{e^{-at}+e^{-bt}}{a-b}
\end{aligned}
$$

Par parité sur $\mathbb{R}$, on obtient alors :

$$
(x*y)(t) = \frac{e^{-a|t|}+e^{-b|t|}}{a+b} - \frac{e^{-a|t|}+e^{-b|t|}}{a-b}
$$

iv)

On sait que $x \in L^1(\mathbb{R})$, on peut donc appliquer la transformée de Fourier. Soit $f \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
F[x](f) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a|t|}e^{-2i\pi ft}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} e^{t(a-2i\pi f)}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-t(a+2i\pi f)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a-2i\pi f} + \frac{1}{a+2i\pi f} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}
\end{aligned}
$$

v)

On cherche ici la transformée de Fourier d'un signal qui correspond à un produit de convolution de deux signaux chacun dans $L^1(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
F[x*y](f) &= F[x](f)F[y](f) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}\frac{2b}{b^2+4\pi^2f^2} \\
&= \frac{4ab}{(a^2+4\pi^2f^2)(b^2+4\pi^2f^2)}
\end{aligned}
$$

vi)

On cherche ici la transformée de Fourier du signal $s : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+4\pi^2 t^2}$. Le signal s a une expression proche de la transformée de Fourier de $x * y$. Nous allons exploiter la similitude entre la transformée de Fourier et son inverse pour passer du domaine fréquentiel au domaine temporel.
Nous cherchons à appliquer la proposition qui permet d'écrire $\bar{F}[F[x]] = x$. Tout d'abord on a bien $x \in L^1(\mathbb{R})$, vérifions que $F[x] \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\|F[x]\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}\right| \mathrm{d}f = 2\int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{a}}{1+\left(\frac{2\pi}{a}f\right)^2} \mathrm{d}f = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \mathrm{d}u \qquad \text{avec } u = \frac{2\pi}{a}f \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\arctan(u)\right]_0^{+\infty} = 1\end{aligned}$$

Et comme x est continue on a alors $x(t) = \bar{F}[F[x]](t)\,\forall t \in \mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{-a|t|} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2} e^{2i\pi f t}\,\mathrm{d}f \\ \Longrightarrow \frac{e^{-|t|}}{2} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+4\pi^2 f^2} e^{2i\pi f t}\,\mathrm{d}f \\ \Longleftrightarrow \frac{e^{-|t|}}{2} &= \int_{\mathbb{R}} s(f) e^{-2i\pi f(-t)}\,\mathrm{d}f \\ \Longleftrightarrow \frac{e^{-|t|}}{2} &= F[s](-t) \iff F[s](t) = \frac{e^{-|t|}}{2}\end{aligned}$$

Et donc la transformée de Fourier de s s'écrit :

$$F[s](f) = \frac{e^{-|f|}}{2}$$

Remarque : on observe bien ici que le fait que, si s est un signal à valeurs réelles, alors $|F[s]|$ est paire.

Pour calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ on remarque que :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= \Re\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+4\pi^4\left(\frac{u}{2\pi}\right)^2} e^{-2i\pi f \frac{u}{2\pi}}\,\mathrm{d}u\right) \\ &= 2\pi\Re\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+4\pi^4 v^2} e^{-2i\pi f v}\,\mathrm{d}v\right) \qquad \text{avec } v = \frac{u}{2\pi} \text{ et } f = 1 \\ &= 2\pi\frac{e^{-1}}{2} = \frac{\pi}{e}\end{aligned}$$

Exercice 4

i)

Soit $\lambda > 0$,

$$s'(x) + \lambda x s(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}&\iff \frac{s'(x)}{s(x)} = -\lambda x \\ &\iff \int_0^t \frac{s'(x)}{s(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^t -\lambda x\,\mathrm{d}x \\ &\iff \ln(s(t)) = ln(s(0)) - \frac{\lambda}{2}t^2 \\ &\iff s(t) = s(0)e^{-\lambda\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

La condition $s(0) = 1$ donne $s(t) = e^{-\lambda\frac{t^2}{2}}$.

ii)

Méthode 1 : calcul direct de la norme $L^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\|s\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \quad \text{avec } u = t\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} < +\infty \quad \text{car } \lambda > 0\end{aligned}$$

Méthode 2 : utilisation des croissances comparées.
On sait que pour $\lambda > 0$, par croissances comparées,

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^2 e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} = 0$$

Donc $\exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| > M \implies e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} \leq \frac{1}{x^2}$.
La norme $L^1(\mathbb{R})$ se décompose en 3 parties :

$$\|s\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2}t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-M} e^{-\frac{\lambda}{2}t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{-M}^{M} e^{-\frac{\lambda}{2}t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{M}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

- $\int_{-\infty}^{-M} e^{-\frac{\lambda}{2}t^2}\,\mathrm{d}t < \int_{-\infty}^{-M} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t < +\infty$ par comparaison d'intégrales de fonctions positives
- $\int_{-M}^{M} e^{-\frac{\lambda}{2}t^2}\,\mathrm{d}t < \int_{-M}^{M} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t < +\infty$ par intégrabilité d'une fonction continue sur $[-M; M]$
- $\int_{M}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}t^2}\,\mathrm{d}t < \int_{M}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t < +\infty$ par comparaison d'intégrales de fonctions positives

Donc $\|s\|_1 < +\infty$.

iii)

$s \in L^1(\mathbb{R})$ et s est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut donc calculer la transformée de Fourier de s'.
Soit $f \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} F[s'](f) = 2i\pi f F[s](f) \\ F[s]'(f) = (-2i\pi)F[x \mapsto xs(x)](f) \end{cases} \tag{13}$$

Soit $f \in \mathbb{R}$, l'EDO s'écrit :

$$\begin{aligned} &2i\pi f F[s](f) + \frac{\lambda}{-2i\pi}F[s]'(f) = 0 \\ \iff &F[s]'(f) = -\frac{4\pi^2}{\lambda} f F[s](f)\end{aligned}$$

Note : La deuxième formule de (13) est analogue au *Théorème 8.18* du cours. Pour démontrer cette formule, on pose $u = F[s] \in L^1(\mathbb{R})$ puis on écrit :

$$\begin{aligned}\bar{F}[u'](x) &= \int_{\mathbb{R}} u'(f)e^{2i\pi fx}\,\mathrm{d}x = \Big[u(f)e^{2i\pi fx}\Big]_{f=-\infty}^{f=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} u(f)2i\pi x e^{2i\pi fx}\,\mathrm{d}f \\ &= -2i\pi x\bar{F}[u](x)\end{aligned}$$

Le premier terme est nul car $u(f) \underset{|f|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ comme $u \in L^1(\mathbb{R})$ et $f \mapsto |e^{2i\pi fx}|$ est bornée.

$$\begin{aligned} &\bar{F}[u'](x) = -2i\pi x\bar{F}[u](x) \\ \implies &F\bar{F}[u'](f) = F[x \mapsto -2i\pi x\bar{F}[u](x)](f) \\ \implies &u'(f) = F[x \mapsto -2i\pi x\bar{F}[u](x)](f) \\ \implies &F[s]'(f) = -2i\pi F[x \mapsto x\bar{F}F[s](x)](f) \\ \implies &F[s]'(f) = -2i\pi F[x \mapsto xs(x)](f)\end{aligned}$$

iv)

En intégrant l'EDO on obtient :

$$\begin{aligned} F[s]'(f) &= -\frac{4\pi^2}{\lambda} f F[s](f) \\ \implies \frac{F[s]'(f)}{F[s](f)} &= -\frac{4\pi^2}{\lambda} f \\ \implies \ln(F[s](f)) &= -\frac{2\pi^2}{\lambda} f^2 \\ \implies F[s](f) &= F[s](0) e^{-\frac{2\pi^2}{\lambda} f^2} \end{aligned}$$

Comme s est positif,

$$F[s](0) = \int_{\mathbb{R}} s(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|\,\mathrm{d}t = \|s\|_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \quad \text{par la question 2}$$

Ainsi, $F[s](f) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} e^{-\frac{2\pi^2}{\lambda} f^2}$.

Remarque : On retrouve l'exemple du cours qui illustre que la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne.

D'un point de vue probabiliste, cela revient à dire que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire à densité gaussienne est une gaussienne. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors la densité de X est $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$ et :

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{itx}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 5

i)

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{C}, \qquad L[s](p) &= \int_0^{+\infty} s(t) e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ \forall f \in \mathbb{R}, \qquad F[s](f) &= \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2i\pi ft}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\forall t \in [0; +\infty], \quad s_+(t) = s(t) \text{ et } s_-(t) = s(-t)$$

Les transformées de Laplace des signaux s_+ et s_- sont :

$$\begin{aligned} L[s_+](p) &= \int_0^{+\infty} s(t) e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ L[s_-](p) &= \int_0^{+\infty} s(-t) e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} s(t) e^{pt}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F[s](f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2i\pi tf}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} s(t) e^{-2i\pi ft}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} s(t) e^{-2i\pi ft}\,\mathrm{d}t \\ &= L[s_+](2i\pi f) + L[s_-](-2i\pi f) \end{aligned}$$

ii)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad s(t) = t^2 e^{|t|}$$

On a alors $s_+(t) = s_-(t)$

$$\begin{aligned} L[s_+](p) &= \int_0^{+\infty} t^2 e^t e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= 2! \frac{1}{(p-1)^3} \qquad \text{d'après la ligne 6 de la table des transformées de Laplace avec } n = 3,\ a = 1 \\ L[s_-](p) &= \int_0^{+\infty} t^2 e^t e^{-pt}\,\mathrm{d}t = L[s_+](p) \end{aligned}$$

Remarquons que $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2(3a^2b + b^3)$.

$$\begin{aligned}
F[s](f) &= \frac{2}{(2i\pi f - 1)^3} - \frac{2}{(2i\pi f + 1)^3} \\
&= 2\frac{(2i\pi f + 1)^3 - (2i\pi f - 1)^3}{((2i\pi f + 1)(2i\pi f - 1))^3} \\
&= 4\frac{3(2i\pi f)^2 + 1}{(-4\pi^2 f^2 - 1)^3} \\
&= 4\frac{12\pi^2 f^2 - 1}{(4\pi^2 f^2 + 1)^3}
\end{aligned}$$

Remarque : On aurait pu calculer la transformée de Fourier en réalisant le calcul directement et en utilisant deux intégrations par parties.

Exercice 6 - Partie 1

i)

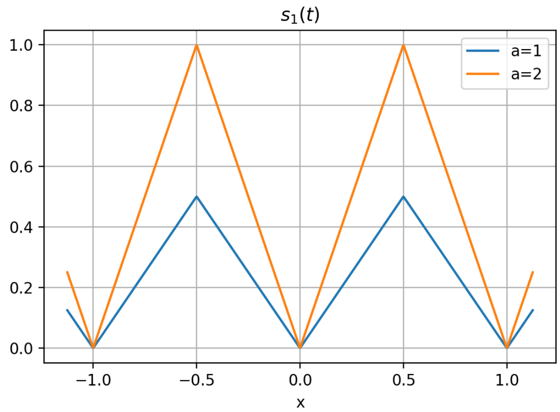

FIGURE 1 – Représentations graphiques de $s_1(t)$ avec $T = 1$ et pour $a = 1$ et $a = 2$.

ii)

Le signal est pair, donc $\forall n \geq 1$, $b_n = 0$.
Soit $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} at\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{atT}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\right]_0^{T/2} - \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\frac{aT}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{aT}{\pi n}\sin(\pi n) - 0 + \frac{2a}{\pi n}\left[\frac{\cos(2\pi n t/T)}{2\pi n/T}\right] \\
&= \frac{aT}{\pi^2 n^2}(\cos(n\pi) - 1) \\
&= \frac{aT}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} -\dfrac{2aT}{\pi^2 n^2} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 \quad \text{si } n \text{ pair} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T at\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} at\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\left[\frac{at^2}{2}\right]_0^{T/2} = \frac{aT}{2}$$

La série de Fourier s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \\ = \frac{aT}{4} + \sum_{n\geq 0} \frac{-2aT}{\pi^2(2n+1)^2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}(2n+1)\right)\end{aligned}$$

Remarque : Le signal s_1 étant continu sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, la série de Fourier associée converge normalement vers s_1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, s_1(t) = \frac{aT}{4} + \sum_{n\geq 0} \frac{-2aT}{\pi^2(2n+1)^2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}(2n+1)\right)$$

iii)

L'énergie d'un signal s est donné par $\|s\|_2^2$.

$$\begin{aligned}E(s_1) = \|s_1\|_2^2 = \int_0^T |s_1(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{T/2} |at|^2 \,\mathrm{d}t = 2a^2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T/2} \\ = \frac{2a^2}{3}\left(\frac{T}{2}\right)^3 = \frac{a^2T^3}{12}\end{aligned}$$

Exercice 6 - Partie 2

i)

Le signal $s_2(t)$ a la même représentation graphique que $s_1(t)$ sur $[0, T]$.

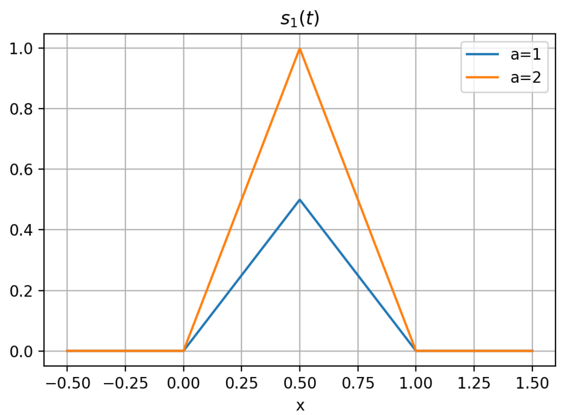

FIGURE 2 – Représentations graphiques de $s_2(t)$ avec $T = 1$ et pour $a = 1$ et $a = 2$.

ii)

$$
\begin{aligned}
F[s_2](f) &= \int_{\mathbb{R}} s_2(t)e^{-2i\pi f t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{T/2} ate^{-2i\pi f t}\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} (-at+aT)e^{-2i\pi f t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{at}{-2i\pi f}e^{-2i\pi f t}\right]_0^{T/2} - \int_0^{T/2} \frac{a}{-2i\pi f}e^{-2i\pi f t}\,\mathrm{d}t + \left[\frac{-at+aT}{-2i\pi f}e^{-2i\pi f t}\right]_{T/2}^{T} - \int_{T/2}^{T} \frac{a}{2i\pi f t}e^{-2i\pi f t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-aT}{-4i\pi f}e^{-i\pi f T} + \left[\frac{a}{4\pi^2 f^2}e^{-2i\pi f t}\right]_0^{T/2} - \frac{-aT/2+aT}{-2i\pi f}e^{-i\pi f T} - \left[\frac{a}{4\pi^2 f^2}e^{-2i\pi f t}\right]_{T/2}^{T} \\
&= \frac{-aT}{4i\pi f}e^{-i\pi f T} + \frac{a}{4\pi^2 f^2}\left(e^{-i\pi f T}-1\right) + \frac{aT}{4i\pi f}e^{-i\pi f T} - \frac{a}{4\pi^2 f^2}\left(e^{-2i\pi f T}-e^{-i\pi f T}\right) \\
&= \frac{-a}{4\pi^2 f^2}\left[e^{-2i\pi f T} - 2e^{-i\pi f T} + 1\right] = \frac{-a}{4\pi^2 f^2}\left(e^{-i\pi f T}-1\right)^2 \\
&= \frac{-a}{4\pi^2 f^2}\left(2ie^{-i\pi f T/2}\left(\frac{e^{-i\pi f T/2}-e^{i\pi f T/2}}{2i}\right)\right)^2 \\
&= \frac{a}{\pi^2 f^2}e^{-i\pi f T}\left(\sin\left(\pi f\frac{T}{2}\right)\right)^2 = \frac{aT^2}{4}e^{-i\pi f T}\left(sinc\left(\pi f\frac{T}{2}\right)\right)^2
\end{aligned}
$$