Exercice 1 Etude d'un filtre linéaire invariant

On considère le filtre linéaire invariant ayant la réponse impulsionnelle suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \delta_0(t) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

où $\tau > 0$ est un réel strictement positif, appelé constante de temps du système, δ_0 représente l'impulsion de Dirac centrée en zéro et u représente l'échelon de Heaviside défini par :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. a. Représenter graphiquement la réponse impulsionnelle h en fonction du temps. On représentera l'impulsion de Dirac par une flèche verticale pointant vers le haut.
   b. Le filtre considéré est-il causal ? Pourquoi ?
2. Calculer la fonction de transfert H de ce filtre. On exprimera cette fonction de transfert sous la forme d'un rapport de deux polynômes du premier degré, et on fera apparaître au numérateur et au dénominateur la quantité $2i\pi\tau f$.
3. a. Donner un équivalent de $H(f)$ lorsque f tend vers 0, puis lorsque f tend vers $+\infty$.
   b. En déduire le diagramme asymptotique de Bode (en gain et en phase) de $H(f)$.
   c. Tracer ce diagramme.
4. a. Quelle est la nature du filtre H ?
   b. Calculer la fréquence de coupure à $-3dB$ de ce filtre. On notera f_c cette fréquence de coupure, et on l'exprimera en fonction de τ.
5. A partir de la fonction de transfert du filtre calculée dans la question 2, retrouver l'équation différentielle entrée-sortie du système correspondant, c'est à dire l'équation différentielle liant les fonctions e et s. On adoptera les notations de la figure ci-dessous :

   $$\underset{\text{Signal d'entrée}}{e(t)} \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow \underset{\text{Signal de sortie}}{s(t)}$$

6. On attaque le filtre par le signal d'entrée suivant :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_a(t) = \frac{1}{a}\left(u(t) - u(t-a)\right)$$

   où $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Le filtre réagit en renvoyant un signal y_a à sa sortie.
   a. Tracer x_a en fonction de t.
   b. Calculer la transformée de Fourier X_a du signal x_a.
7. En déduire Y_a la transformée de Fourier du signal obtenu en sortie du filtre.
8. a. A partir de $Y_a(f)$, retrouver l'expression de $y_a(t)$.
   b. Tracer $y_a(t)$ sur le même graphique que $x_a(t)$.

9. Quelle est la limite de $y_a(t)$ lorsque a tend vers 0 ? Conclure.

Exercice 2

1. Déterminer la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal, de bande passante B .
2. Déterminer la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bande idéal, de bande passante centrée en f_0 et de largeur B.

Exercice 3 Considérons un filtre de fonction de transfert

$$\forall f \in \mathbb{R}, \quad H(f) = \frac{1}{1 + 2i\pi f}$$

auquel on applique un signal d'entrée x défini par

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

1. Calculer la densité spectrale énergétique du signal de sortie.
2. Montrer que l'énergie délivrée en sortie est le tiers de celle fournie à l'entrée du filtre.

Exercice 4 Déterminer la réponse d'un filtre linéaire invariant à un signal d'entrée sinusoïdal.

Exercice 5 **Pour aller plus loin, CC2 de juin 2010, 2h**

Remarque : les résultats de l'exercice 1 sont nécessaires pour traiter la fin de l'exercice 2.

Exercice 1 : calcul de transformées de Fourier (4 points)

On considère les quatre fonctions suivantes u_1 , u_2, s_1 et s_2.

$u_1(t) = e^{-\alpha t} e^{i\omega t} u(t)$

$u_2(t) = e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} u(t)$

$s_1(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega t) u(t)$

$s_2(t) = e^{-\alpha t} \sin(\omega t) u(t)$

où α et ω sont des réels strictement positifs, et $u(t)$ est l'échelon d'Heaviside :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que s_1 et s_2 appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$.
2. Calculer la transformée de Fourier de s_1 et s_2.

Exercice 2 : Étude d'un filtre linéaire invariant. (16 points)

On désire dans cet exercice étudier le comportement du filtre dont la fonction de transfert est donnée par

$$\forall f \in \mathbb{R}, \quad H(f) = \frac{H_0}{1 + iQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)} \tag{1}$$

où

i représente le nombre imaginaire pur tel que $i^2 = -1$,

H_0, f_0 et Q sont des réels strictement positifs,

f_0 représente la fréquence centrale du filtre,

Q représente le facteur de qualité du filtre.

1. a. Exprimer $H(f_0)$.
   b. Chercher un équivalent de $H(f)$ lorsque f tend vers 0. Montrer que cet équivalent peut s'écrire sous la forme $H(f) \sim C_1 \frac{f}{-if_0}$ avec C_1 une constante que l'on exprimera en fonction de H_0 et Q.
   c. Chercher un équivalent de $H(f)$ lorsque f tend vers $+\infty$. Montrer que cet équivalent peut s'écrire sous la forme $H(f) \sim C_2 \frac{f_0}{if}$ avec C_2 une constante que l'on exprimera en fonction de H_0 et Q.
2. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de gain et de phase, ainsi que le diagramme réel, dans le cas où $Q > 1$.
3. Même question dans le cas où $0 < Q < 1$.
4. a. De quel type de filtre s'agit-il ?
   b. Calculer les fréquences de coupure à -3dB de ce filtre. On notera ces fréquences f_{c1} et f_{c2}. On note Δf la bande passante à -3dB de ce filtre. Exprimer Δf en fonction de f_0 et Q.
5. a. En posant $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ et en faisant apparaître le terme $2i\pi f$, réécrivez la fonction de transfert du filtre.
   b. On applique en entrée du filtre un signal $x(t)$ quelconque. Le filtre réagit en créant un signal de sortie noté $y(t)$. A partir de la fonction de transfert précédemment réécrite, trouver l'équation différentielle qui relie $y(t)$ à $x(t)$ (appelée équation différentielle entrée/sortie). Démontrer que cette équation différentielle peut se mettre sous la forme suivante :
   $$y''(t) + 2\zeta\omega_0 y'(t) + \omega_0^2 y(t) = H_0 2\zeta\omega_0 x'(t) \tag{2}$$
   où ζ désigne le coefficient d'amortissement. Exprimer ζ en fonction de Q et f_0.
6. a. Montrer que $H(f)$ peut s'écrire sous la forme
   $$H(f) = K_1 \frac{\alpha + i2\pi f}{(\alpha + i2\pi f)^2 + \omega_n^2} + K_2 \frac{\omega_n}{(\alpha + i2\pi f)^2 + \omega_n^2} \tag{3}$$
   où α et ω_n sont des coefficients que l'on exprimera en fonction de H_0 , f_0 et Q.
   b. Quelle est la condition sur Q pour que l'on ait le droit de faire la décomposition (3) ? On suppose par la suite que Q vérifie cette condition.
   c. Déterminer les constantes K_1 et K_2 en fonction de H_0, f_0 et Q.
7. Déterminer l'expression de la réponse impulsionnelle du filtre.
8. Représenter la réponse impulsionnelle de ce filtre.