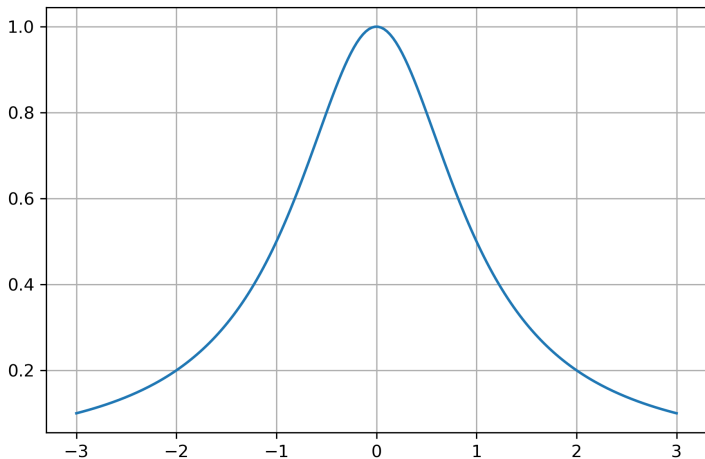


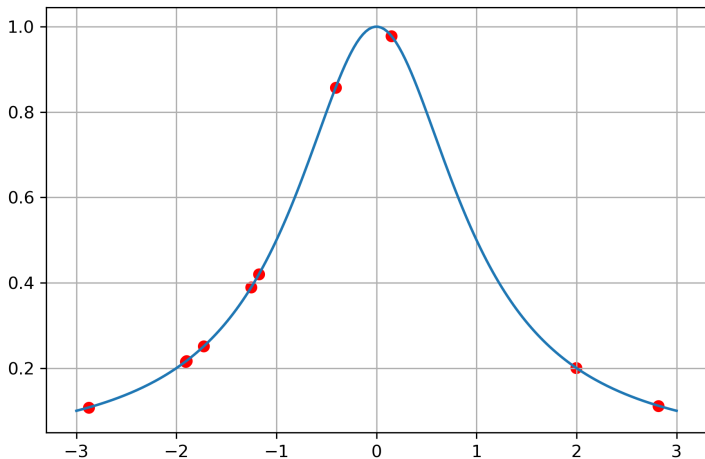
Introduction à l'interpolation

Analyse numérique et optimisation 3MIC

Fonction à interpoler



Choix des points d'interpolation



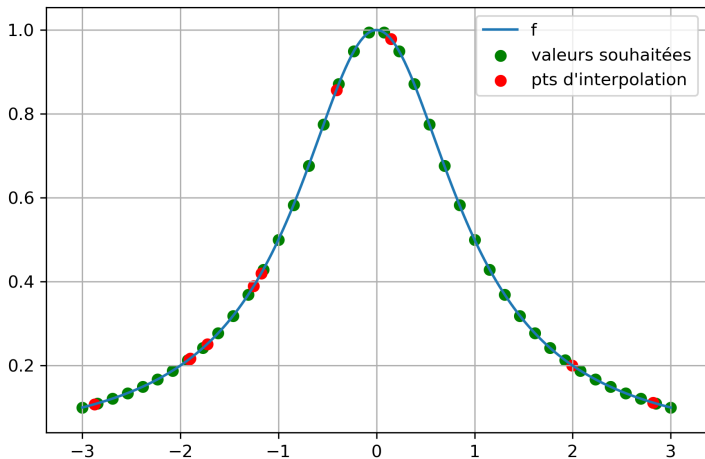
A partir de points d'interpolation $(x_i, y_i)_{i=0\dots n-1}$ de la fonction f on veut construire une fonction interpolante notée p .

La fonction p doit correspondre à f aux points d'interpolation :

$$y_i = p(x_i) \quad \forall i = 0 \dots n-1 \quad (1)$$

⚠ L'écriture de ces contraintes revient toujours à écrire un système linéaire !

Utilité de l'interpolation



Méthode d'interpolation directe

On considère des fonctions interpolantes sous forme de polynômes :

$$p(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \quad (2)$$

Les coefficients (a_k) sont des valeurs qui dépendent de f la fonction à interpoler.

Ce sont ces valeurs que l'on cherche à calculer pour déterminer la fonction interpolante.

Méthode d'interpolation directe

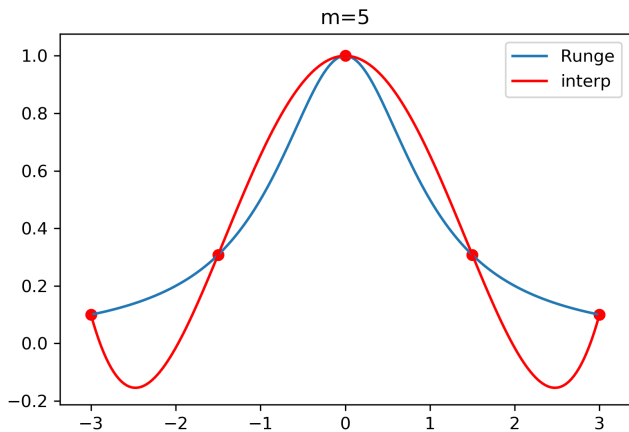
Calcul des valeurs de (a_k)

On écrit les contraintes aux différents points d'interpolation :

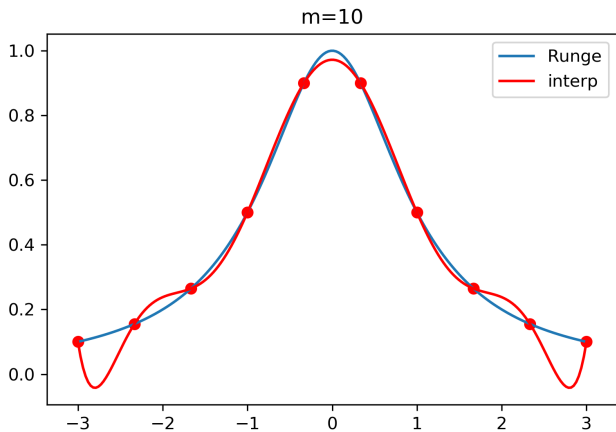
$$\left\{ \begin{array}{l} p(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_0^k = y_0 \\ \vdots \\ p(x_i) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_i^k = y_i \\ \vdots \\ p(x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{n-1}^k = y_{n-1} \end{array} \right. \implies \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_i^k = y_i \quad \forall i = 0 \dots n-1 \quad (3)$$

Système linéaire à résoudre : $Ma = y$ avec M la matrice de Vandermonde, $y = (y_k)$ et l'inconnue $a = (a_k)$.

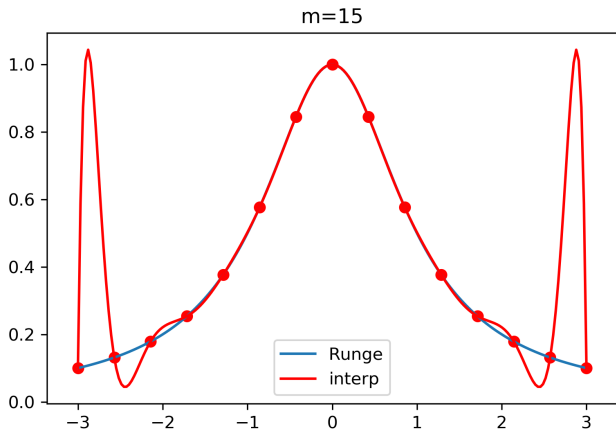
Méthode d'interpolation directe



Méthode d'interpolation directe



Méthode d'interpolation directe



Interpolation par d'autres fonctions → **les polynômes de Lagrange**

$$p(X) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j L_{j,n}(X) \quad (4)$$

$$\text{avec } L_{j,n}(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \frac{X - x_k}{x_j - x_k} \quad (5)$$

Ici l'égalité $p(x_i) = y_i \quad \forall i = 0 \dots n-1$ est toujours vérifiée (propriété des polynômes de Lagrange).

Méthode d'interpolation de Lagrange

On veut évaluer p en un ensemble de valeurs $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i=0\dots m-1}$:

$$p(X) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j L_{j,n}(X)$$

$$p(\hat{x}_i) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j L_{j,n}(\hat{x}_i)$$

On pose $\mathcal{L}_{i,j} = L_{j,n}(\hat{x}_i)$

$$\hat{y}_i = p(\hat{x}_i) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_{i,j} y_j$$

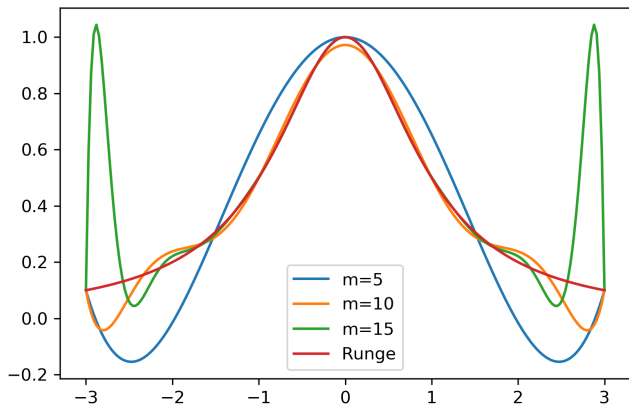
$$\hat{y} = \mathcal{L} y$$

→ simple multiplication matrice-vecteur

lci

$$\mathcal{L}_{i,j} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \frac{\hat{x}_i - x_k}{x_j - x_k}$$

Méthode d'interpolation de Lagrange



Interpolation par d'autres fonctions → **les polynômes de Newton**

$$p(X) = \sum_{j=0}^{n-1} z_j N_{j,n}(X) \quad (6)$$

avec

$$N_{j,n}(X) = \prod_{k=0}^{j-1} (X - x_k)$$

- 1) Calcul de (z_j) tel que $y_i = p(x_i) \quad \forall i = 0 \dots n-1$
- 2) Evaluation de la fonction interpolante p en des points $(\hat{x}_i)_{i=0 \dots m-1}$

① Calcul de (z_j)

Comme pour la méthode directe on cherche à calculer (z_j) tel que $y_i = p(x_i)$.

Cela revient à résoudre le système linéaire $Nz = y$ avec N la matrice $n \times n$ dont les éléments sont donnés par :

$$N_{i,j} = \prod_{k=0}^{j-1} (x_i - x_k) \quad (7)$$

② Evaluation de la fonction interpolante

L'interpolation en m points \hat{x}_i est donnée par l'expression des polynômes de Newton en fonction de z .

$$\begin{aligned} p(\hat{x}_i) &= \sum_{j=0}^{n-1} z_j N_{j,n}(\hat{x}_i) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} L_{i,j} z_j \end{aligned}$$

Avec L la matrice $m \times n$

$$L_{i,j} = N_{j,n}(\hat{x}_i) = \prod_{k=0}^{j-1} (\hat{x}_i - x_k) \quad (8)$$

Méthode d'interpolation de Newton

